ARTÍCULO ORIGINAL

Los grupos de género real par

On the groups of even real genus

María Pires Choupina
Universidad Complutense de Madrid.
mpiressd1@gmail.com

RESUMEN

Todo grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de diversas superficies de Klein con borde. Al menor de los géneros algebraicos de estas superficies se le llama género real $\rho(G)$ del grupo G. Se sabe que todos los enteros positivos impares son género real de algún grupo. Sin embargo, no todos los pares lo son. En el artículo *Groups of even real genus*, Coy L. May recopiló una serie de familias de grupos, a partir de las cuales obtiene sucesiones aritméticas de géneros reales pares con las que se cubre gran parte del conjunto de los números pares. En este trabajo se estudian las familias de grupos mencionadas en el artículo de May, se determinan los valores obtenidos a partir de estas familias, es decir, aquellos números pares que se sabe que son género real de algún grupo, y se estudian los valores que no han aparecido. Además, se obtiene un valor nuevo, perteneciente al espectro del género real, que May no contempló en su artículo.

PALABRAS CLAVE: Género real, superficies de Klein, grupos de automorfismos, grupos NEC.

ABSTRACT

Every finite group G acts as an automorphism group of several bordered Klein surfaces. The minimal genus of these surfaces is called the real genus $\rho(G)$ of the group G. It is known that all odd positive integers are the real genus of some group. However, not all even integers are. In the paper *Groups of even real genus*, Coy L. May compiled a series of families of groups, from which he obtained arithmetic sequences of even numbers which are real genus of some group, covering a large part of the even numbers. In this work we study the families of groups mentioned in May's paper, we determine the values obtained from these families, those that are the real genus of some group, and we study the values that have not appeared. Additionally, we discover a new value, belonging to the real genus spectrum, which May did not consider in his paper.

KEYWORDS: Real genus, Klein surfaces, automorphism groups, NEC groups.

El presente artículo corresponde al Trabajo de Fin de Grado de su autora, defendido en la Universidad Complutense, y dirigido por el académico que suscribe. El trabajo se dedica a estudiar el género real de los grupos finitos, que es un parámetro relacionado con la acción de los grupos sobre superficies. En él se obtienen tres resultados relevantes para el ulterior estudio de este parámetro. Se obtienen explícitamente los 328 números menores que 10.000 de los que no se sabía si son género real de algún grupo, se prueba que uno de ellos sí lo es, y se señalan cinco números concretos que conviene estudiar porque pueden arrojar luz sobre este y otro parámetro.

José Javier Etayo
Académico de Número de la Sección de Ciencias Experimentales

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de superficie de Klein extiende el concepto clásico de superficie de Riemann. Las superficies de Klein pueden tener borde y pueden ser orientables o no orientables. Una superficie de Klein sin borde y orientable es una superficie de Riemann.

Sea S una superficie de Klein con género topológico g y k componentes en el borde, se le llama *género algebraico* de S a la expresión:

$$p = \eta g + k - 1$$

donde η vale 2 si la superficie es orientable y 1 en caso contrario.

Se denomina grupo *Cristalográfico No Euclídeo* (grupo NEC) a todo subgrupo discreto Γ del grupo de isometrías del plano hiperbólico $\mathcal{D}$, con espacio cociente $\mathcal{D}/\Gamma$ compacto. Los grupos NEC tienen un papel muy importante porque tanto las superficies de Klein como sus grupos de automorfismos se caracterizan a través de los grupos NEC.

Sea S una superficie de Klein de género algebraico $p \geq 2$, género topológico g y k componentes en el borde. Entonces, existe un grupo NEC Γ, llamado grupo de superficie, tal que S y $\mathcal{D}/\Gamma$ son isomorfas.

Un grupo finito G es un *grupo de automorfismos de la superficie S* si y solo si existe otro grupo NEC Λ tal que Γ es un subgrupo normal de Λ y existe un epimorfismo $\theta\colon \Lambda \to G$ cuyo núcleo sea $\ker(\theta) = \Gamma$ y tal que $G = \frac{\Lambda}{\Gamma}$. Esta caracterización pone de relieve la importancia de los subgrupos normales de los grupos NEC.

Todo grupo finito G puede actuar como grupo de automorfismos de distintas superficies de Klein. Esto plantea el problema de determinar cuál es el mínimo género algebraico de las superficies sobre las que cada grupo particular G puede actuar. Si consideramos las superficies de Klein con borde, orientables o no, el mínimo género algebraico de estas superficies sobre las que G actúa se llama *género real* de G y se denota por $\rho(G)$.

Este parámetro ha recibido mucha atención en estas tres últimas décadas y su estudio constituye un activo campo de investigación. Existen numerosos trabajos en los que se estudia el género real para diferentes familias de grupos, habiéndose obtenido ya muchos resultados, pero quedan todavía bastantes problemas por resolver.

En este trabajo se aborda el problema de determinar qué valores enteros positivos son el género real de algún grupo, es decir, para qué valores de ρ existe algún grupo con género real ρ. Se sabe que todos los números impares son género real de algún grupo, por lo que el problema se reduce a los números pares. A continuación se presentan los resultados que se conocen hasta el momento respecto a este problema.

El estudio sistemático del género real fue iniciado por Coy L. May. Se sabe que no existen grupos con género real 2, 12, ó 24. Los siguientes valores de ρ para los que todavía no se han obtenido grupos con género real ρ, son 72, 84, 108, 132, 168 y 192. Obsérvese que todos ellos son múltiplos de 12 tales que ρ - 1 es primo. Se cree que los valores de ρ para los que no existe un grupo con género real ρ son de la forma $1 + p$ siendo p un primo. Además, May comprobó con rutinas programadas en MAGMA, a partir de fórmulas conocidas que proporcionan valores pares de ρ que son género real de algún grupo, que hasta 10^6 la mayoría de los números no cubiertos eran múltiplos de 12.

Con los estudios realizados por May se cubren 403.337 de las clases de congruencia módulo 480.480, esto es, más de 5/6 del total de los enteros positivos son el género real de algún grupo. El objetivo de este trabajo es comprobar dichas afirmaciones de May, explicitar cuáles son los números que quedan hasta 10.000, y estudiar en particular los valores de ρ múltiplos de 12, tales que ρ - 1 sea primo, que parecen ser los mejores candidatos a no ser género real de ningún grupo. Además, analizamos la lista de los números que quedan para proponer líneas de estudio futuras.

A continuación, se describen los diferentes capítulos de este trabajo.

En el segundo capítulo se detallan todos los preliminares necesarios para el cálculo del género real de un grupo finito G. Se explican los conceptos de grupo NEC y superficies de Klein, se caracterizan las superficies de Klein y sus grupos de automorfismos mediante grupos NEC y se describen los subgrupos normales de un grupo NEC.

En el tercer capítulo se aborda el problema de determinar para qué valores de ρ existe algún grupo con género real ρ. Se enumeran los grupos con género real impar entre 1 y 7 y se presentan cuatro familias de grupos conocidas con género real impar, cada una de las cuales proporciona todos los números impares restantes del espectro del género real. Además, se introducen las familias de grupos conocidas con género real par, junto con las sucesiones aritméticas de géneros reales que se obtienen a partir de ellas.

Finalmente, en el cuarto capítulo se muestran los valores obtenidos con estas sucesiones, se estudian los valores que no han aparecido y se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos por May en su artículo. Además, se proponen posibles líneas de estudio futuras.

2. PRELIMINARES

En este capítulo se presentan las definiciones básicas y resultados generales en los que se apoya el desarrollo de los capítulos posteriores.

En la primera sección se introduce el plano hiperbólico $\mathcal{D}$ a través de los dos modelos de Poincaré (el modelo del semiplano superior H^2 y el modelo del disco Δ) y se clasifican las isometrías de dicho espacio.

La segunda sección tiene por objeto presentar los grupos Cristalográficos No Euclídeos, grupos NEC, como subgrupos discretos del grupo $\mathcal{G}$ de isometrías del plano hiperbólico $\mathcal{D}$. Se describe su estructura algebraica (generadores y relaciones que cumplen éstos), así como la región fundamental de Wilkie asociada a la actuación de un grupo NEC en $\mathcal{D}$, y se introducen los conceptos de signatura y área de un grupo NEC.

En la tercera sección se definen las superficies de Klein y se caracterizan, junto con sus grupos de automorfismos, a través de los grupos NEC.

Finalmente, en la cuarta sección, se aborda el problema de calcular el género real de un grupo y se describe el procedimiento para realizar dicho cálculo.

2.1. El Plano Hiperbólico

El plano hiperbólico, $\mathcal{D}$, es el espacio sobre el que se desarrollará el trabajo que se presenta en esta memoria. Por ello, se comienza dando una breve descripción de los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico: el modelo del semiplano superior H^2 y el modelo del disco Δ. Para un estudio completo de la geometría de este espacio véase [4].

Sea H^2 el semiplano superior complejo

$$H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Para considerar a H^2 como modelo del plano hiperbólico, se define en él la diferencial invariante

$$ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z},$$

y la *longitud* de un camino $\gamma: [a, b] \to H^2$ como:

$$\| \gamma \| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t)}\, dt.$$

La *distancia* entre dos puntos $z, w \in H^2$ viene dada por:

$$\rho(z,w) = \text{ínf} \parallel \gamma \parallel,$$

donde γ recorre todos los caminos que unen z y w en H^2. Estonces, ρ dota a H^2 de estructura de espacio métrico.

Podemos obtener una expresión explícita para $\rho(z,w)$:

$$\rho(z,w) = log \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}$$

El *área hiperbólica* de un subconjunto medible Lebesgue $E \subset H^2$ queda determinada por:

$$|E| = \iint_E \frac{dxdy}{y^2}.$$

Llamaremos *circunferencia del infinito*, al eje real ampliado: $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Las *geodésicas* o *h-rectas* de (H^2, ρ) son la intersección de H^2 con circunferencias euclídeas con centro en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, o con rectas ortogonales a la circunferencia del infinito.

Dos *h*-rectas se dicen *disjuntas* si no tienen puntos en común, *paralelas* si tienen en común un punto del eje real y *secantes* si tienen en común un punto de H^2.

Un desarrollo paralelo se tiene para el modelo del *disco unidad*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

con la métrica δ derivada de la diferencial

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2},$$

$$\delta(z,w) = log \frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|},$$

$$|E| = \iint_E \left[\frac{2}{1-|z|^2}\right]^2 dxdy.$$

En este modelo las geodésicas o *h*-rectas son diámetros o arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia del infinito: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Podemos pasar de un modelo a otro mediante la transformación

$$\begin{aligned} V :\ & H^2 \longrightarrow \Delta \\ & z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}. \end{aligned}$$

Cada uno de estos modelos presenta ventajas particulares. En concreto, se usa el modelo del disco Δ, cuando se quiere ilustrar procesos geométricos mediante polígonos hiperbólicos. El modelo del semiplano superior H^2 es el más apropiado para hacer cálculos con matrices que representan isometrías.

En el plano complejo ampliado $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se considera el grupo $\mathcal{G}$ formado por las siguientes transformaciones:

$$\text{(i)}\ z \to \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$$

$$\text{(ii)}\ z \to \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1$$

Se tiene que $\mathcal{G}$ es el grupo de todas las isometrías de (H^2, ρ).

Las transformaciones del tipo (i) conservan la orientación y se clasifican en:

- *Hiperbólicas*: Si $|a + d| > 2$. Tienen dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- *Elípticas*: Si $|a + d| < 2$. Tienen un punto fijo en H^2.
- *Parabólicas*: Si $|a + d| = 2$. Tienen un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Las transformaciones del tipo (ii) invierten la orientación y se clasifican en:

- *Reflexiones*: Si $|a + d| = 0$. Tienen una *h*-recta de puntos fijos que se llama *eje* de la transformación.
- *Reflexiones sesgadas*: Si $|a + d| \neq 0$. Tienen dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Sea $GL(2, \mathbb{R})$ el grupo de las matrices reales 2×2 no singulares. La aplicación

$$GL(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M} = \left\{\frac{az + b}{cz + d}, ad - bc > 0\right\} \cup \left\{\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, ad - bc < 0\right\}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f_A : z \to \begin{Bmatrix} \dfrac{az + b}{cz + d} & \text{si } det\ A > 0 \\ \dfrac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} & \text{si } det\ A < 0 \end{Bmatrix}$$

es un epimorfismo de grupos. El núcleo de esta aplicación es el conjunto de matrices

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\right\}$$

que designamos por $K = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$. Entonces, podemos identificar a $\mathcal{M}$ con el cociente

$$PGL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})/K$$

denominado *grupo general lineal proyectivo*.

Sea $SL(2,\mathbb{R})$ el grupo de las matrices reales 2×2 cuyo determinante es igual a 1 y $SL(2,\mathbb{R})^*$ el conjunto de las matrices reales 2×2 cuyo determinante es igual a -1. La aplicación

$$SL(2,\mathbb{R}) \cup SL(2,\mathbb{R})^* \longrightarrow \mathcal{G}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto f_A : z \longrightarrow \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } det\,A = 1 \\ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} & \text{si } det\,A = -1 \end{cases}$$

es un epimorfismo de grupos. El núcleo de esta aplicación es también el conjunto de matrices $K = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$. Entonces, podemos identificar a $\mathcal{G}$ con el cociente

$$(SL(2,\mathbb{R}) \cup SL(2,\mathbb{R})^*)/K.$$

Definición 1 Un subgrupo Γ de $\mathcal{G}$ se dice discreto si es discreto como subespacio topológico del grupo de todas las isometrías de (H^2,ρ).

2.2. Grupos cristalográficos no Euclídeos: Grupos NEC

Definición 2 Se denomina grupo cristalográfico no Euclídeo (grupo NEC) a todo subgrupo discreto Γ del grupo de isometrías del plano hiperbólico $\mathcal{D}$, con espacio cociente $\mathcal{D}/\Gamma$ compacto.

Definición 3 Se llama Γ-órbita de un elemento $z \in \mathcal{D}$ al conjunto $\Gamma_z = \{\gamma(z) : \gamma \in \Gamma\}$.

Definición 4 Se llama estabilizador de z al conjunto $G_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(z) = z\}$.

Definición 5 Un grupo G de automorfismos de un espacio topológico X actúa discontinuamente en X, si para todo $x \in X$ existe un entorno U tal que el conjunto

$$\{g \in G : g(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

es finito. Si además, se cumple que para todos $x, y \in X$ tales que $\Gamma_x \cap \Gamma_y = \emptyset$, existen entornos U y V de x e y respectivamente, tales que $g(U) \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$, entonces se dice que G actúa propia y discontinuamente en X.

Teorema 1 [5] Todo grupo NEC Γ actúa propia y discontinuamente en $\mathcal{D}$.

Definición 6 Sea Γ un grupo NEC. Una región fundamental de Γ es un conjunto cerrado $F \subset \mathcal{D}$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) F contiene al menos un elemento de cada Γ-órbita.
(ii) $\mathring{F}$ contiene a lo más un elemento de cada Γ-órbita.
(iii) El área hiperbólica de $F - \mathring{F}$ es cero.

Para todo grupo NEC se puede construir una región fundamental. En efecto, del carácter discreto de Γ, se tiene que existe un punto $p \in \mathcal{D}$ con estabilizador trivial en Γ. Esto es, existe

$p \in \mathcal{D}$ tal que $\gamma(p) \neq p$ para todo $\gamma \in \Gamma$ distinto de la identidad. A partir de este punto construimos la siguiente región fundamental, denominada *región de Dirichlet* de Γ centrada en el punto p:

$$F_p = \{z \in \mathcal{D}: d(z,p) \leq d(\gamma(z),p) \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\}.$$

Definición 7 Toda región fundamental que cumpla las siguientes propiedades se denomina región fundamental regular:

(i) F_p es un polígono convexo y acotado homeomorfo a un disco cerrado.
(ii) La frontera de F_p es una curva poligonal de Jordan. Esto es, una unión finita de segmentos hiperbólicos.
(iii) Existe un número finito de puntos en $F_p - \mathring{F}_p$ (los vértices) que dividen a la frontera de F_p en arcos de Jordan (las aristas).

Proposición 1 [21] Toda región de Dirichlet es una región fundamental regular.

Sea F una región fundamental regular. El conjunto $\{gF : g \in \Gamma\}$ es una teselación del plano hiperbólico $\mathcal{D}$. Las imágenes de F por los elementos de Γ se llaman *caras*.

Mediante un proceso de cortado y pegado Wilkie [21] llegó a encontrar una región fundamental, que denotaremos por R_W, para un grupo NEC Γ que es un polígono con un número finito de lados y cuyo perímetro es de la siguiente forma:

$$(*) \quad \xi_1\xi_1' \dots \xi_r\xi_r'\varepsilon_1\gamma_{1,0} \dots \gamma_{1,s_1}\varepsilon_1' \dots \varepsilon_k\gamma_{k,0} \dots \gamma_{k,s_k}\varepsilon_k'\alpha_1\beta_1\alpha_1'\beta_1' \dots \alpha_g\beta_g\alpha_g'\beta_g'$$
$$(**) \quad \xi_1\xi_1' \dots \xi_r\xi_r'\varepsilon_1\gamma_{1,0} \dots \gamma_{1,s_1}\varepsilon_1' \dots \varepsilon_k\gamma_{k,0} \dots \gamma_{k,s_k}\varepsilon_k'\delta_1\delta_1^* \dots \delta_g\delta_g^*$$

según que $\mathcal{D}/\Gamma$ sea orientable o no, respectivamente. Llamaremos a R_W *región fundamental de Wilkie* o *polígono de Wilkie*.

En estas expresiones denotamos por e', siendo e una etiqueta de una arista, a la arista $g(e)$ si g es una transformación que conserva la orientación, o bien, denotamos por e^* a la arista $g(e)$ si g invierte la orientación. Los lados (e, e') y (e, e^*) se dice que son *congruentes* o que están emparejados. Si se escriben las etiquetas de los lados de F en sentido contrario a las agujas del reloj, se obtiene el *símbolo de superficie* de Γ, que determina la presentación de Γ así como la estructura topológica de $\mathcal{D}/\Gamma$.

Los ángulos en el polígono R_W son:

$$\langle \xi_i, \xi_i' \rangle = \frac{2\pi}{m_i},\ i = 1, \dots, r,$$
$$\langle \gamma_{i,j}, \gamma_{i,j+1} \rangle = \frac{\pi}{n_{i,j+1}},\ i = 1, \dots, k,\ j = 0, \dots, s_i - 1,$$
$$\langle \varepsilon_i, \gamma_{i,0} \rangle + \langle \gamma_{i,s_i}, \varepsilon_i' \rangle = \pi,\ i = 1, \dots, k$$

y el resto de ángulos suma 2π.

Las transformaciones que aplican un lado en su correspondiente forman un sistema de generadores del grupo NEC Γ.

Generadores:

$x_i,\ i = 1, \dots, r$	(elementos elípticos)
$e_i,\ i = 1, \dots, k$	(elementos hiperbólicos salvo el caso $g = 0, k = 1, r = 1$)
$c_{i,j},\ \ i = 1, \dots, k,\ j = 0, \dots, s_i$	(reflexiones)
$a_i,\ b_i,\ \ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{g}$ en el caso $(*)$	(hiperbólicos)
$d_i,\ \ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{g}$ en el caso $(**)$	(reflexiones sesgadas)
$x_i(\xi_i) = \xi'_\mathrm{i}$	para todo $i = 1, \dots, r$
$e_i(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$	para todo i =1, …, k salvo el caso $g = 0, k = 1, r = 1$
$c_{i,j}(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j}$	para todo $i = 1, \dots, k,\ j = 0, \dots, s_i$
$a_i(\alpha_i) = \alpha'_i,\ b_i(\beta_i) = \beta'_i$ en el caso (*)	para todo $i = \ 1, \dots, g$
$d_i(\delta_i) = \delta^*_i$ en el caso (**)	para todo $i = \ 1, \dots, g$

Estos generadores cumplen las siguientes relaciones:

$x_i^{m_i} = 1,\ i = 1, \dots, r;$
${c_{i,j-1}}^2 = {c_{i,j}}^2 = \left(c_{i,j-1}c_{i,j}\right)^{n_{i,j}} = 1,\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, s_i;$
${e_i}^{-1}c_{i,0}e_ic_{i,s_i} = 1,\ i = 1, \dots, k;$
$x_1 \dots x_re_1 \dots e_ka_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1$, en el caso (*);
$x_1 \dots x_re_1 \dots e_kd_1^2 \dots d_g^2 = 1$, en el caso $(**)$

donde $m_i,\ n_{i,j}$ son enteros positivos que corresponden al número de caras que inciden en los vértices donde se intersecan los lados (ξ'_i, ξ_i) y $\left(\gamma_{i,j-1}, \gamma_{i,j}\right)$ respectivamente.

Desde ahora, siempre que utilicemos los símbolos $a_i,\ b_i, c_{i,j}, d_i, e_i, x_i$, harán referencia a los generadores citados anteriormente, que se denominan *generadores canónicos*.

A partir de la región fundamental de Wilkie, Macbeath introdujo el concepto de signatura de un grupo NEC [10]. La signatura, como veremos a continuación, es un símbolo que determina completamente la estructura algebraica del grupo.

Definición 8 Una signatura NEC es una colección formada por:

(i) un entero $g \geq 0$,
(ii) un signo $+$ ó -,
(iii) un conjunto ordenado de números enteros $m_1, \dots, m_r, m_i \geq 2, r \geq 0$, llamados periodos propios,
(iv) una familia ordenada de conjuntos ordenados de enteros

$$\{C_1 = (n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, C_k = (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}, k \geq 0, n_{i,j} \geq 2, s_i \geq 0,$$

llamados ciclo-periodos. Los números $n_{i,j}$ se denominan link periodos o simplemente periodos.

Una signatura se denota con el símbolo $(g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{C_1, \dots, C_k\})$ o más explícitamente

$$(g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}).$$

Cuando la signatura no tenga periodos propios se escribirá [-], cuando no haya ciclo-periodos se designará por {-}, y los ciclo-periodos vacíos ($s_i = 0$) se especificarán con el símbolo (-). Además, una secuencia de periodos de la forma $m, \overset{l}{\dots}, m$, se denotará por m^l.

Un grupo NEC cuya región fundamental es del tipo (*) tiene por signatura:

$$(g; +; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}),$$

y si la región fundamental es del tipo (**) la signatura es:

$$(g; -; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\}).$$

En ambos casos, la signatura, así como la región, determinan la presentación del grupo en términos de generadores y relaciones anteriormente expuestos.

Proposición 2 [10, 21] Sean Γ y Γ' grupos NEC con signaturas

$$\sigma = (g; \pm; [m_1, \dots, m_r]; \{(n_{1,1}, \dots, n_{1,s_1}), \dots, (n_{k,1}, \dots, n_{k,s_k})\})$$

y

$$\sigma' = \left(g'; \pm; [m'_1, \dots, m'_{r'}]; \{\left(n'_{1,1}, \dots, n'_{1,s'_1}\right), \dots, \left(n'_{k',1}, \dots, n'_{k',s'_{k'}}\right)\}\right).$$

Entonces Γ y Γ' son isomorfos como grupos abstractos, si y solamente si:

(i) tienen el mismo signo,
(ii) $g = g', r = r', k = k'$ y $s_i = s'_i$ para $i = 1, \dots, k$,
(iii) $[m_1, \dots, m_r]$ es una permutación de $[m'_1, \dots, m'_{r'}]$,
(iv) si el signo es "+", entonces existe una permutación p de $\{1, \dots, k\}$ tal que para cada

$i, 1 \leq i \leq k$:

(1) O bien C'_i es una permutación cíclica de $C_{p(i)}$.

(2) O bien C'_i es una permutación cíclica del inverso de $C_{p(i)}$.

(v) si el signo es "-", entonces existe una permutación p de $\{1, \ldots, k\}$ tal que todo C'_i es una permutación cíclica de $C_{p(i)}$, o todo C'_i es una permutación cíclica del inverso de $C_{p(i)}$.

Definición 9 Se denomina grupo NEC de superficie a aquél cuya signatura es

$$\left(g; \pm; [-]; \{(-)^k\}\right).$$

Además, cuando $g = 0$, diremos que es un grupo de superficie planar, y cuando $k > 0$ lo llamaremos grupo de superficie con borde.

Introducimos a continuación el concepto de área de un grupo NEC, el cual depende únicamente de su signatura (véase [20]).

Definición 10 Dado un grupo NEC Γ se llama área de Γ, y se denota por $|\Gamma|$, al área de cualquiera de sus regiones fundamentales.

Mediante el teorema de Gauss-Bonnet, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2 [20] Sea Γ un grupo NEC con signatura

$$\left(g; \pm; [m_1, \ldots, m_r]; \{(n_{1,1}, \ldots, n_{1,s_1}), \ldots, (n_{k,1}, \ldots, n_{k,s_k})\}\right),$$

entonces

$$|\Gamma| = 2\pi \left\{ \eta g + k - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s_i} \left(1 - \frac{1}{n_{i,j}}\right) \right\}$$

donde $\eta =$ 2 ó 1 si el signo de la signatura es $+$ ó - respectivamente.

De esto se deduce que es condición necesaria para que una signatura determine un grupo NEC que el área sea estrictamente positiva. En [22] se demostró que la condición es también suficiente:

Teorema 3 [22] Dada una signatura σ, existe un grupo NEC Γ con dicha signatura, si y sólo si $|\Gamma| > 0$.

Teorema 4 Sea Γ un subgrupo de un grupo NEC Γ'. Entonces, Γ es un grupo NEC si y sólo si el índice $[\Gamma' : \Gamma]$ es finito.

Además, se tiene que si Γ es un subgrupo de un grupo NEC Γ' de índice N, entonces la relación entre sus áreas es, según la fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$[\Gamma' : \Gamma] = \frac{|\Gamma|}{|\Gamma'|}$$

Escrito de otra forma,

$$|\Gamma| = N \cdot |\Gamma'|$$

2.3. Superficies de Klein

Se introduce en esta sección el concepto abstracto de superficie de Klein, así como la caracterización de tales superficies mediante grupos NEC.

Llamaremos *superficie* a un espacio topológico S conexo y Hausdorff junto con una familia $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$, tal que $\{U_i : i \in I\}$ es un recubrimiento abierto de S y cada aplicación $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ o del semiplano complejo cerrado $\mathbb{C}^+$. La familia $\mathcal{A}$ es un *atlas topológico* en S y sus elementos se denominan *cartas*. Se llaman *funciones de transición* a los homeomorfismos

$$\phi_i \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j).$$

La orientabilidad de S se define como si se tratase de una 2-variedad real, previa identificación de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. El *borde* de S es el conjunto

$$\partial S = \{x \in S : \text{existe } i \in I \text{ tal que } x \in U_i, \phi_i(x) \in \mathbb{R} \text{ y } \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^+\}.$$

El atlas topológico $\mathcal{A}$ es *dianalítico* si las funciones de transición son dianalíticas. Esto es, si dado $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\phi_i \phi_j^{-1}$ es analítica ó $\overline{\phi_i \phi_j^{-1}}$ es analítica.

Dos atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es dianalítico. Una estructura dianalítica en S es una clase de equivalencia de atlas dianalíticos en S.

Definición 11 [1] Una superficie de Klein es una superficie S dotada de una estructura dianalítica.

El concepto de superficie de Klein extiende el clásico de superficie de Riemann. Una superficie sin borde en la que las funciones de transición $\phi_i \phi_j^{-1}$ son analíticas, es una superficie de Riemann. Es decir, una superficie de Klein orientable y sin borde.

Ejemplos: El semiplano superior complejo $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ y el disco unidad abierto $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tienen estructuras de superficie de Klein (ambas sin borde), inducidas por los atlas triviales $\{U_1 = H^2, \phi_1 = 1_H\}$ en H^2 y $\{U_1 = \Delta, \phi_1 = 1_\Delta\}$ en Δ.

Definición 12 La función de plegado es la aplicación continua y abierta

$$\Phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{+}: x + iy \mapsto x + i|y|.$$

Definición 13 Dadas dos superficies de Klein S_1 y S_2, un morfismo entre ellas es una aplicación continua $f: S_1 \to S_2$, tal que

(i) $f(\partial S_1) = \partial S_2$, y
(ii) para cada $x \in S_1$ existen cartas (U, ϕ) y (V, ψ) en $x \in S_1$ y $f(x) \in S_2$ respectivamente, con $x \in U$, $f(U) \subset V$ y existe una función analítica $F: \phi(U) \to \mathbb{C}$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \phi(U) \xrightarrow{F} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\Phi} \psi(\mathrm{V}) \end{array}$$

Observación: Si S_2 no tiene borde, entonces por la condición (i) tampoco lo tiene S_1. En particular, si f es un morfismo entre superficies de Riemann que preserva la orientación, entonces se puede prescindir de Φ en el diagrama anterior. Se obtiene así la definición clásica de morfismo entre superficies de Riemann.

Definición 14 Un automorfismo f de una superficie de Klein S es un morfismo $f: S \to S$ entre las estructuras dianalíticas que además es homeomorfismo.

El conjunto $Aut(S)$ de todos los automorfismos de una superficie de Klein S tiene estructura de grupo.

Teorema 5 [1] Sea G un grupo de automorfismos de una superficie de Klein S, que actúa en ella propia y discontinuamente. Entonces, $S' = S/G$ admite una única estructura de superficie de Klein tal que la proyección $\pi: S \to S'$ es un morfismo.

Los siguientes resultados permiten caracterizar las superficies de Klein y sus grupos de automorfismos mediante los grupos NEC:

Teorema 6 [1] Dado un grupo NEC Γ, el espacio cociente $\mathcal{D}/\Gamma$ tiene una estructura dianalítica tal que la proyección $\pi: \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Gamma$ es un morfismo de superficies de Klein.

Sea (X, σ) una superficie de Riemann simétrica, donde X es una superficie de Riemann compacta y $\sigma: X \to X$ una involución antianalítica. El espacio cociente $X/\langle\sigma\rangle$ tiene una única estructura de superficie de Klein tal que la proyección $\pi: X \to X/\langle\sigma\rangle$ es un morfismo. Por otro lado, dada una superficie de Klein S de género topológico g y con k componentes en el borde, existe una única superficie de Riemann simétrica (X, σ) llamada *cubierta doble* de S satisfaciendo que $X/\langle\sigma\rangle$ es isomorfa a S. El género topológico de (X,σ) recibe el nombre de *género algebraico de* S (véase [11]) y tiene la siguiente expresión

$$p = \eta g + k - 1$$

donde η vale 2 si la superficie es orientable y 1 en caso contrario.

La existencia de (X,σ) es un hecho fundamental en el estudio de las superficies de Klein pues permite obtener propiedades de éstas a partir de la teoría clásica de superficies de Riemann.

Teorema 7 [18, 19] Sea S una superficie de Klein de género algebraico $p \geq 2$, género topológico g y k componentes en el borde. Entonces, existe un grupo NEC de superficie, Γ, con signatura

$$(g; \pm; [-]; \{(-), \overset{k}{\dots}, (-)\}),$$

y signo "+" ó "-" según que la superficie sea orientable o no, tal que S y $\mathcal{D}/\Gamma$ son isomorfas como superficies de Klein. Además, si $\pi: \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Gamma$ es la proyección canónica, entonces $\Gamma = \{f \in \mathcal{G}: \pi \circ f = \pi\}$, siendo $\mathcal{G}$ el grupo de todas las isometrías de (H^2, ρ).

Observación: Las únicas superficies topológicas compactas que no satisfacen la condición $p \geq 2$ son: la esfera y el toro (orientables y sin borde), el disco cerrado y el anillo cerrado (orientables y con borde), el plano proyectivo y la botella de Klein (no orientables y sin borde), la banda de Möbius (no orientable y con borde).

Teorema 8 [12] Dos superficies de Klein homeomorfas $\mathcal{D}/\Gamma_1$ y $\mathcal{D}/\Gamma_2$, donde Γ_1 y Γ_2 son grupos de superficie, son isomorfas si y sólo si Γ_1 y Γ_2 son grupos conjugados en $\mathcal{G}$.

Teorema 9 [12] Sea Γ un grupo NEC, entonces el normalizador de Γ en $\mathcal{G}$, $N_{\mathcal{G}}(\Gamma)$, es un grupo NEC.

Teorema 10 [12] Un grupo finito G es un grupo de automorfismos de una superficie de Klein $S = \mathcal{D}/\Gamma$ si y sólo si existe un grupo NEC Γ' y un epimorfismo $\theta : \Gamma' \to G$ tal que $\ker(\theta) = \Gamma$ y $G = \Gamma'/\Gamma$.

Como consecuencia de estos resultados se tiene que el grupo *Aut(S)* de todos los automorfismos de una superficie de Klein $S = \mathcal{D}/\Gamma$ de género algebraico $p \geq 2$ es finito por la fórmula de Riemann-Hurwitz. Además, $Aut(S) = N_{\mathcal{G}}(\Gamma)/\Gamma$.

2.4. Cálculo del género real

Calcular el género real de un grupo finito G consiste en encontrar un mínimo para el género algebraico de las superficies donde actúa G como grupo de automorfismos.

Sea S una superficie de Klein de género algebraico $p \geq 2$, género topológico g y k componentes en el borde. Entonces, como vimos en la sección anterior, existe un grupo NEC de superficie Γ con signatura $(g; \pm; [-]; \{(-), \overset{k}{\dots}, (-)\})$, y signo "+" ó "-" según que la superficie sea orientable o no, tal que $S = \mathcal{D}/\Gamma$.

Recordemos también que un grupo finito G actúa como grupo de automorfismos de la superficie S si existe un grupo NEC Λ tal que $\Gamma \triangleleft \Lambda$, siendo Γ un grupo NEC de superficie, y existe un epimorfismo $\theta : \Lambda \to G$ cuyo núcleo es $\ker(\theta) = \Gamma$ tal que $G = \frac{\Lambda}{\Gamma}$.

Utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz, se tiene que

$$\mathrm{o}(G) \cdot |\Lambda| = |\Gamma| = 2\pi(\eta g + \mathrm{k} - 2).$$

Dividiendo por 2π y llamando área reducida de Λ a la expresión $|\Lambda|^* = \frac{|\Lambda|}{2\pi}$, obtenemos

$$\mathrm{o}(G) \cdot |\Lambda|^* = \eta g + k - 2 = p - 1,$$

luego

$$p = 1 + \mathrm{o}(G) \cdot |\Lambda|^*,$$

siendo p el género algebraico de la superficie de Klein S.

El problema de encontrar un mínimo para el género algebraico de las superficies donde G actúa como grupo de automorfismos es equivalente al problema de encontrar un mínimo para el área (reducida) de un grupo NEC Λ que admite grupos de superficie con borde como subgrupos normales y para el que se puede construir el epimorfismo anterior $\theta : \Lambda \to G$.

Para determinar la existencia del grupo NEC Λ el cual ha de poseer un subgrupo de superficie con borde, necesitaremos el siguiente resultado demostrado en [6].

Lema 1 Un grupo NEC Λ admite un subgrupo de superficie con borde si y sólo si en la signatura de Λ aparece un ciclo-período vacío o un ciclo-período con dos link-periodos consecutivos iguales a 2.

El procedimiento para calcular el género real de un grupo finito G se puede desglosar en dos pasos. El primero consiste en encontrar un grupo NEC Λ_0 con cierta signatura que admita un grupo de superficie como subgrupo normal, y construir el epimorfismo $\theta : \Lambda_0 \to G$ definiendo las imágenes mediante θ de los generadores de Λ_0 de forma que se satisfaga que $\ker(\theta) = \Gamma$. Así habremos obtenido una cota superior para el género real:

$$\rho(G) \leq p = 1 + \mathrm{o}(G) \cdot |\Lambda_0|^*$$

El segundo paso será demostrar que no existe un grupo NEC Λ con área reducida menor que la de la cota anterior de forma que se pueda construir un epimorfismo $\theta : \Lambda \rightarrow G$.

Obsérvese que hay una cota inferior para el género real de un grupo G en términos de su orden. La mínima área reducida para un grupo NEC que contiene un grupo NEC de superficie con borde como subgrupo normal es $1/12$, correspondiendo a un grupo NEC con signatura $(0; +; [-]; \{(2,2,2,3)\})$. En ese caso, $\rho(G) = 1 + |G|/12$. Los grupos que alcanzan esta cota se denominan $M^* -$ grupos, a estos grupos se les llama grupos de automorfismos de superficies de Klein con simetría máxima.

3. GÉNERO REAL DE GRUPOS FINITOS

En este capítulo abordamos el problema de determinar qué valores enteros positivos son el género real de algún grupo, es decir, para qué valores de ρ existe algún grupo con género real ρ. Se sabe que todos los números impares son género real de algún grupo, por lo que el problema se reduce a los números pares. El trabajo fundamental en el que se basa este estudio es el artículo de C. L. May, *Groups of even real genus* [16]. En dicho artículo, el autor presenta una serie de familias que proporcionan sucesiones aritméticas de géneros reales pares, obteniéndose así muchos enteros positivos del conjunto de los números pares, aunque no todos. El objetivo de este trabajo es determinar qué números hasta 10000 se obtienen con estas sucesiones y estudiar los que faltan.

En la primera sección de este capítulo se enumeran los grupos con género real impar entre 1 y 7 y se presentan cuatro familias de grupos conocidas con género real impar, cada una de las cuales proporciona todos los números impares restantes del espectro del género real.

En la segunda sección se introducen las familias de grupos con género real par dadas por May en [16], junto con las sucesiones aritméticas de géneros reales que se obtienen a partir de ellas.

Finalmente, en el siguiente capítulo se muestran los valores obtenidos con estas sucesiones, se estudian los valores que no han aparecido y se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos por May en su artículo.

Para cada una de las familias de grupos presentadas en este capítulo se da la presentación del grupo junto con sus generadores, el grupo NEC Λ que actúa en cada caso y el epimorfismo $\theta: \Lambda \rightarrow G$ correspondiente. No se prueba que el área de Λ es mínima porque se puede hacer sin dificultad (en la mayoría de casos es trivial al ser los elementos de menor orden).

3.1. Grupos con género real impar

Sabemos que para cada entero positivo impar ρ existe al menos un grupo cuyo género real es dicho número [13, Teorema 9].

Los grupos con género real 1 son $C_2 \times C_n$ con $n \geq 4$ par y $C_2 \times D_n$ con n par [13, Teorema 4]. Solo hay dos grupos con género real 3: el grupo simétrico S_4 y el grupo alternado A_4 [13, 14]. Hay diez grupos con género real 5: $C_2 \times S_4$, L_4^*, G_{32}, $C_2 \times A_4$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$, L_4, $(4,4 \mid 2,2)$, $\langle 2,2,2 \rangle_2$, Q [14, Teorema 11] y el grupo cuasiabeliano QA_4 [15], donde los grupos L_4^* y G_{32} son dos grupos de orden 32 y L_4 es el grupo semidiedral de orden 16. Hay tres grupos con género real 7: $C_3 \times D_4$ [8], $C_4 \times D_3$ y $D_3 \times D_4$ [9]. Para el resto de impares, se tiene que cada valor $\rho = 1 + 2n$ es el género real de:

DC_n	para $n > 3$	[13]
$C_3 \times D_n$	para $n \geq 5$	[8]
$C_n \times D_3$	para $n \geq 5$	[7, 8]
$D_3 \times D_n$	para $n \geq 5$	[8]

3.1.1. DC_n

Sea DC_n el grupo dicíclico de orden $4n$ con presentación:

$$\langle X, Y | X^{2n} = 1, X^n = Y^2, Y^{-1}XY = X^{-1} \rangle$$

Se tiene que Y tiene orden 4 ya que $Y^4 = X^{2n} = 1$ y XY también tiene orden 4 ya que $XY = YX^{-1} \Rightarrow (XY)^2 = (XY)(YX^{-1}) = XY^2X^{-1} = XX^nX^{-1} = X^n \Rightarrow (XY)^4 = X^{2n} = 1$. Luego XY e Y son generadores del grupo.

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [4,4], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to DC_n$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= XY, \\ \theta(x_2) &= Y, \\ \theta(e_1) &= (XY^2)^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en DC_n, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{2}$. De esta forma obtenemos

$$\rho(DC_n) = 1 + o(DC_n)|\Lambda|^* = 1 + 4n\frac{1}{2} = 1 + 2n.$$

3.1.2. $C_3 \times D_n$

Sea C_3 el grupo cíclico de orden 3 y D_n el grupo diedral de orden $2n$. Denotamos al generador de C_3 por X y a los generadores de D_n por A y B, satisfaciendo las relaciones:

$$X^3 = 1, A^2 = B^2 = (AB)^n = 1.$$

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [2,6], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_3 \times D_n$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= A, \\ \theta(x_2) &= XB, \\ \theta(e_1) &= X^{-1}BA, \\ \theta\left(c_{1,0}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $\theta((x_2)^3) = B$ y $\theta((x_2)^4) = X$. Luego θ es un epimorfismo, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\rho(C_3 \times D_n) = 1 + \text{o}\ (C_3 \times D_n)|\Lambda|^* = 1 + 6n\frac{1}{3} = 1 + 2n.$$

3.1.3. $C_n \times D_3$

De nuevo, como en el caso anterior, tenemos los generadores X de C_n y A y B de D_3, en este caso satisfaciendo las siguientes relaciones:

$$X^n = 1, A^2 = B^2 = (AB)^3 = 1.$$

Distinguimos ahora dos casos en función de si n es par o impar.

Caso 1 Si n es par, podemos escribir el grupo $C_n \times D_3$ como $C_{2m} \times D_3$ con $m > 3$ ya que $n = 2m > 6$. Distinguimos, nuevamente, dos casos en función de si m es par o impar.

Caso 1.1. Si m es par, se cumplen las siguientes relaciones:

$$X^m = 1, A^2 = B^2 = (AB)^3 = 1.$$

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [-], \{(3), (-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_{2m} \times D_3$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= XA, \\ \theta(e_2) &= X^{-1}A, \\ \theta(c_{1,0}) &= ABA, \\ \theta(c_{1,1}) &= B, \\ \theta(c_{2,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces $\theta\left(\left(c_{1,0}c_{1,1}\right)^2 c_{1,1}\right) = A$ y $\theta\left(e_1\left(c_{1,0}c_{1,1}\right)^2 c_{1,1}\right) = X$. Luego θ es un epimorfismo, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\rho(C_{2m} \times D_3) = 1 + o(C_{2m} \times D_3)|\Lambda|^* = 1 + 12m\frac{1}{3} = 1 + 4m = 1 + 2n.$$

Caso 1.2. Si m es impar se tiene que $C_{2m} \times D_3 \approx C_m \times D_6$ y se cumplen las siguientes relaciones:

$$X^m = 1, A^2 = B^2 = (AB)^6 = 1.$$

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [-], \{(3), (-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_m \times D_6$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= XBA, \\ \theta(c_{1,0}) &= B, \\ \theta(c_{1,1}) &= ABA, \\ \theta(e_2) &= ABX^{-1}, \\ \theta(c_{2,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Dado que $\theta(e_1 c_{1,1}) = XBAABA = XA$, se tiene $\theta\left((e_1 c_{1,1})^m\right) = A$ y $\theta\left((e_1 c_{1,1})^{m+1}\right) = X$. Luego θ es un epimorfismo, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{3}$. Por tanto, se obtiene

$$\rho(C_m \times D_6) = 1 + o(C_m \times D_6)|\Lambda|^* = 1 + 12m\frac{1}{3} = 1 + 4m = 1 + 2n.$$

Caso 2 Si n es impar, sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [-], \{(3), (-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_n \times D_3$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(e_1) &= X(AB)^2, \\ \theta(e_2) &= X^{-1}AB, \\ \theta(c_{1,0}) &= A, \\ \theta(c_{1,1}) &= B, \\ \theta(c_{2,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces $\theta(e_1 c_{1,0} c_{1,1}) = X(AB)^3 = X$. Luego θ es un epimorfismo, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\rho(C_n \times D_3) = 1 + o\,(C_n \times D_3)|\Lambda|^* = 1 + 6n\frac{1}{3} = 1 + 2n.$$

3.1.4. $D_3 \times D_n$

Sea el grupo $D_3 \times D_n$ con $D^3 = \langle A, B | A^2, B^2, (AB)^3 \rangle$ y $D_n = \langle C, D | C^2, D^2, (CD)^n \rangle$. Se tiene que $(ABD)^3 = D$ y $BD(ABD)^3 = B$, luego los elementos A, BD y C generan todo el grupo. Tomemos estos elementos, todos ellos de orden 2, como generadores del grupo.

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [-], \{(2,2,6,2)\})$ y $\theta: \Lambda \to D_3 \times D_n$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(c_{1,0}) &= C, \\ \theta(c_{1,1}) &= 1, \\ \theta(c_{1,2}) &= BD, \\ \theta(c_{1,3}) &= A, \\ \theta(c_{1,4}) &= C. \end{aligned}$$

Tenemos que se satisfacen las relaciones, θ es un epimorfismo, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = \frac{1}{6}$. Por lo tanto, se obtiene

$$\rho(D_3 \times D_n) = 1 + o(D_3 \times D_n)|\Lambda|^* = 1 + 12n\frac{1}{6} = 1 + 2n.$$

3.2. Grupos con género real par

Como se ha visto en la sección anterior, para cada entero positivo impar ρ existe un grupo con género real ρ, luego el problema de determinar qué valores de ρ son género real de algún grupo queda resuelto para los números impares. En esta sección, vamos a ver qué ocurre con los pares.

A continuación, se introducen las familias infinitas de grupos con género real par dadas por May en [16]. En cada caso, comprobamos el orden de los elementos del grupo y establecemos explícitamente el epimorfismo $\theta: \Lambda \to G$, cosa que no se hace en [16].

3.2.1. Grupos abelianos

En [17], McCullough obtuvo el género real de todos los grupos abelianos. En particular, consideramos la familia $C_m \times C_{mk}$, con m entero impar, $m \geq 3$ y k un entero positivo.

Sea $C_m \times C_{mk}$ el producto directo de los grupos cíclicos C_m y C_{mk}, de órdenes m y mk, respectivamente. Denotamos al generador de C_m por X y al generador de C_{mk} por Y, satisfaciendo las relaciones:

$$X^m = Y^{mk} = 1, XY = YX.$$

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [m, mk], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_m \times C_{mk}$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= X, \\ \theta(x_2) &= Y, \\ \theta(e_1) &= (XY)^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_m \times C_{mk}$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mk}$. De esta forma, se obtiene la siguiente sucesión aritmética para cada $m \geq 3$ entero impar:

$$\begin{aligned} \rho(C_m \times C_{mk}) &= 1 + o(C_m \times C_{mk})|\Lambda|^* = 1 + m^2k\left(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{mk}\right) \\ &= 1 + m^2k - mk - m = (m-1)(km-1) \end{aligned}$$

Por ejemplo, para $m = 3$, tenemos $\rho(C_3 \times C_{3k}) = 6k - 2$ y existe un grupo con género real ρ para cada $\rho \equiv 4 \ mod\ 6$. Para cada entero impar $m \geq 3$, esta familia de grupos cubre todos los enteros en una clase de congruencia módulo $m(m-1)$. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3 [16, Proposición 1] Sea ρ un entero positivo par. Si existe un entero impar m tal que

$$\rho \equiv (m-1)^2 \ mod\ m\ (m-1)$$

entonces existe al menos un grupo con género real ρ.

3.2.2. Productos semidirectos.

A continuación, May utiliza la noción de producto semidirecto para construir algunas familias de grupos de género real par.

- **1**. $C_p \times_\phi C_n$

Sea p un primo impar, sea 2^k la menor potencia de 2 tal que $p < 2^k$ y sea n un entero positivo par primo con p y tal que 2^k divide a n. Sea X el generador del grupo cíclico C_p, Y el generador del grupo cíclico C_n, consideramos el producto semidirecto $C_p \times_\phi C_n$ con presentación:

$$X^p = Y^n = 1, Y^{-1}XY = X^{-1}$$

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [p, n], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_p \times_\phi C_n$ definida por:

$$\begin{aligned} \theta(x_1) &= X, \\ \theta(x_2) &= Y, \\ \theta(e_1) &= (XY)^{-1}, \\ \theta(c_{1,0}) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_p \times_\phi C_n$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. De manera que obtenemos

$$\rho(C_p \times_\phi C_n) = 1 + o(C_p \times_\phi C_n)|\Lambda|^* = 1 + pn\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) = 1 + pn - n - p = (p-1)(n-1)$$

que es, precisamente, la sucesión aritmética para cada primo impar p que proporciona May para el género real de estas familias de grupos [16, Teorema 2].

De esta forma, para cada primo impar p, se puede construir una familia de grupos con género real par. Por ejemplo, con $p = 3$, sea n un entero positivo par primo con 3 y tal que 4 divide a n, se tiene $\rho(C_3 \times_\phi C_n) = 2(n-1)$, y los valores de ρ cubiertos con esta sucesión pueden ser expresados como clases de congruencia módulo $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$. En particular, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 11 [16, Corolario 2] Si un entero par ρ es congruente con 6 ó 14 módulo 24, entonces existe un entero n tal que $C_3 \times_\phi C_n$ tiene género real ρ.

- **2**. $C_p \times_\theta C_n$

Ahora, consideramos la familia de grupos dada por el producto semidirecto $C_p \times_\theta C_n$, pero esta vez con p primo impar tal que 3 divide a $p - 1$.

Sea p un primo impar tal que 3 divide a $p-1$, sea 3^k la menor potencia de 3 tal que $p < 3^k$ y sea n un entero positivo primo con p y tal que 3^k divide a n. Sea X el generador del grupo cíclico C_p, Y el generador del grupo cíclico C_n, consideramos el producto semidirecto $C_p \times_\theta C_n$ con presentación:

$$X^p = Y^n = 1, Y^{-1}XY = X^r$$

con $r^3 \equiv 1 \, mod \, p$ y $r \not\equiv 1 \; mod \; p$.

Tomando de nuevo el grupo NEC Λ con signatura $(0,+,[p,n],\{(-)\})$ y el mismo epimorfismo que en el caso anterior, volvemos a obtener la fórmula

$$\rho\big(C_p \times_\theta C_n\big) = (p-1)(n-1)$$

que es, nuevamente, la sucesión aritmética que proporciona May para el género real de estas familias de grupos [16, Teorema 3].

Así, para cada primo impar p tal que 3 divide a $p-1$, se puede construir una familia de grupos con género real par. Por ejemplo, con $p = 7$, sea n un entero positivo primo con 7 y tal que 9 divide a n, se tiene $\rho(C_7 \times_\theta C_n) = 6(n-1)$, y los valores de ρ cubiertos con esta sucesión pueden ser expresados como clases de congruencia módulo $378 = 9 \cdot 7 \cdot 6$. En particular, $\rho(C_7 \times_\theta C_9) = 48$, un valor de gran interés dado que es múltiplo de 12 y $\rho - 1 = 47$ es primo.

- **3**. L_{4p}

Finalmente, sea p un primo impar tal que 4 divide a $p-1$, consideramos el grupo no abeliano de orden $4p$ con presentación

$$X^p = Y^4 = 1, \; Y^{-1}XY = X^r$$

con $r^4 \equiv 1 \, mod \, p$, $r \not\equiv 1 \; mod \; p$ y $r^2 \not\equiv 1 \, mod \, p$. Este grupo es un producto semidirecto $C_p \times_\psi C_4$ y lo denotamos por L_{4p}.

Veamos que el elemento XY^2 de L_{4p} tiene orden 2. Tenemos que $XY = YX^r$, entonces $XY^2 = (XY)Y = (YX^r)Y = Y(X^rY) = YYX^{r^2} = Y^2X^{r^2}$. Ahora, $(XY^2)(XY^2) = \left(Y^2X^{r^2}\right)\left(Y^2X^{r^2}\right) = Y^2\left(X^{r^2}Y\right)YX^{r^2} = Y^2\left(YX^{r^3}\right)YX^{r^2} = Y^3YX^{r^4}X^{r^2} = Y^4X^{(r^4+r^2)}$. Por un lado, $Y^4 = 1$. Por otro lado, $X^{(r^4+r^2)} = X^{r^2(r^2+1)}$. Veamos ahora que r^2+1 es múltiplo de p. Como $r^4 \equiv 1 \; mod \; p$, r^4-1 es múltiplo de p. Tenemos $r^4-1 = (r^2+1)(r^2-1)$ múltiplo de p con p primo, luego uno de los dos factores es múltiplo de p. No puede ser r^2-1 porque $r^2 \not\equiv 1 \; mod \; p$. Por lo tanto, r^2+1 es múltiplo de p y, en consecuencia, r^4+r^2 también lo es. Luego, $X^{(r^4+r^2)}$ es X elevado a un múltiplo de p. Como $X^p = 1$, $X^{(r^4+r^2)} = 1$. Así que $(XY^2)(XY^2) = Y^4X^{(r^4+r^2)} = 1 \cdot 1 = 1$ y XY^2 tiene orden 2.

Tomamos como generadores del grupo XY^2 e Y, elementos de orden 2 y 4, respectivamente. Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0,+,[2,4],\{(-)\})$ y $\theta\colon \Lambda \to L_{4p}$ definida por:

$$
\begin{aligned}
\theta(x_1) &= XY^2,\\
\theta(x_2) &= Y,\\
\theta(e_1) &= YX^{-1},\\
\theta(c_{1,0}) &= 1.
\end{aligned}
$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en L_{4p}, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. De manera que obtenemos

$$\rho(L_{4p}) = 1 + o(L_{4p})|\Lambda|^* = 1 + 4p \cdot \frac{1}{4} = 1 + p$$

que es, precisamente, la fórmula que proporciona May para el género real de esta familia de grupos [16, Teorema 4].

Sumado a esto, May proporciona algunos grupos de género real par adicionales, pero solo una cantidad finita para cada primo particular p.

- 4. $C_n \times L_{4p}$

Sea p un primo impar tal que 4 divide a $p-1$ y sea n un entero positivo primo con $2p$ y tal que $n < p/2$, consideramos el producto directo $C_n \times L_{4p}$. Sea A el generador de C_n, entonces el elemento AY tiene orden $4n$ ya que n es primo con 2. Tomamos los elementos XY^2 y AY, de orden 2 y $4n$ respectivamente, como generadores del producto directo $C_n \times L_{4p}$.

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0,+,[2,4n],\{(-)\})$ y $\theta\colon \Lambda \to C_n \times L_{4p}$ definida por:

$$
\begin{aligned}
\theta(x_1) &= XY^2,\\
\theta(x_2) &= AY,\\
\theta(e_1) &= A^{-1}YX^{-1},\\
\theta(c_{1,0}) &= 1.
\end{aligned}
$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_n \times L_{4p}$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$. De manera que obtenemos

$$\rho(C_n \times L_{4p}) = 1 + o(C_n \times L_{4p})|\Lambda|^* = 1 + 4pn\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) = 1 + p(2n - 1)$$

que es, precisamente, la fórmula que proporciona May para el género real de esta familia de grupos [16, Corolario 6].

3.2.3. Grupos de orden impar

Por último, May proporciona fórmulas para el género real de familias de grupos $C_n \times G$ que son producto directo del grupo cíclico C_n con determinados grupos finitos no abelianos G de orden impar generados por dos elementos, con n y $|G|$ coprimos.

1. $C_n \times G_{qp}$

Sea $C_n \times G_{qp}$ el producto directo del grupo cíclico C_n con el grupo no abeliano G_{qp} de orden qp, con q y p primos impares tales que q divide a $p-1$ y n primo con qp. Sea A el generador de C_n y X e Y los generadores de G_{qp}, satisfaciendo las relaciones:

$$A^n = X^p = Y^q = 1,\ Y^{-1}XY = X^r,$$

con $r^q \equiv 1\ mod\ p$ y $r \not\equiv 1\ mod\ p$.

Veamos que el elemento XY tiene orden q. Como $Y^{-1}XY = X^r$, tenemos $XY = YX^r$ y $(XY)^q = (XY)XYXYXY\cdots XY = (YX^r)XYXYXY\cdots XY = YX^{(r+1)}YXYXY\cdots XY = Y\big(X^{(r+1)}Y\big)XYXY\cdots XY = Y\big(YX^{(r+1)r}\big)XYXY\cdots XY = Y^2X^{(r^2+r+1)}YXY\cdots XY = \cdots = Y^{(q-1)}X^{(r^{(q-1)}+r^{(q-2)}+\cdots+r)}XY = Y^{(q-1)}X^{(r^{(q-1)}+r^{(q-2)}+\cdots+r+1)}Y$

Veamos que el exponente de X es múltiplo de p. Si lo multiplicamos por $(r-1)$, queda $\big(r^{(q-1)} + r^{(q-2)} + \cdots + r + 1\big)(r-1) = r^q - 1$ que es múltiplo del primo p ya que $r^q \equiv 1\ mod$ p. Luego uno de los dos factores ha de ser múltiplo de p. Como $r-1$ no es múltiplo de p, dado que $r \not\equiv 1\ mod\ p$, se tiene que el otro factor es múltiplo de p y, por lo tanto, $X^{(r^{(q-1)}+r^{(q-2)}+\cdots+r+1)} = 1$. Luego, $(XY)^q = Y^{(q-1)} \cdot 1 \cdot Y = Y^q = 1$ y XY tiene orden q. Además, se tiene que $(XY)Y^{(q-1)} = X\big(YY^{(q-1)}\big) = XY^q = X$. Luego los elementos Y y XY, ambos de orden q, generan el grupo G_{qp}.

Veamos ahora que los elementos Y y AXY generan el grupo $C_n \times G_{qp}$. Se tiene que $(AXY)Y^{(q-1)} = AXY^q = AX$, que tiene orden pn ya que p y n son coprimos, y $(AX)^p = A^p$. Como p y n son coprimos, por la identidad de Bezout, existen dos enteros a y b tales que $pa + nb = 1$. Entonces, $(AX)^{pa} = A^{pa} = A^{(1-nb)} = A$. De igual forma, $(AX)^{nb} = X^{nb} = X^{(1-pa)} = X$.

Tomamos Y y AXY, elementos de orden q y qn respectivamente, como generadores de $C_n \times G_{qp}$. Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [q, qn], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_n \times G_{qp}$ definida por:

$$\theta(x_1) = Y,$$
$$\theta(x_2) = AXY,$$
$$\theta(e_1) = (YAXY)^{-1},$$
$$\theta(c_{1,0}) = 1.$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_n \times G_{qp}$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{qn}$. De manera que obtenemos

$$\rho(C_n \times G_{qp}) = 1 + o(C_n \times G_{qp})\ |\Lambda|^* = 1 + pqn\ \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{qn}\right)$$

$$= 1 + p\ (qn - n - 1)$$

que es, precisamente, la fórmula que proporciona May para el género real de esta familia de grupos [16, Teorema 6]

En particular, para $q = 3$, p primo impar tal que 3 divide a $p - 1$ y n primo con $3p$, tenemos

$$\rho(C_n \times G_{3p}) = 1 + p(2n - 1) \text{ [16, Corolario 8]}.$$

Por ejemplo, con $p = 7$ tenemos $\rho(C_n \times G_{3\cdot 7}) = 14n - 6$ para n primo con 21.

2. $C_{3n} \times G_{3p}$

Sea p primo impar tal que 3 divide a $p - 1$ y n primo con $3p$, consideramos ahora la familia $C_{3n} \times G_{3p}$. Sea A el generador del grupo cíclico C_{3n}, y X e Y los generadores del grupo no abeliano G_{3p}, satisfaciendo las relaciones:

$$A^{3n} = X^p = Y^3 = 1,\ Y^{-1}XY = X^r,$$

con $r^3 \equiv 1\ mod\ p$ y $r \not\equiv 1\ mod\ p$.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la familia $C_n \times G_{qp}$ con $q = 3$, llegamos a que el elemento XY tiene orden 3. Además, $(XY)Y^2 = XY^3 = X$. Luego los elementos Y y XY, ambos de orden 3, generan el grupo G_{3p}.

Veamos ahora que los elementos Y y AXY generan el producto directo $C_{3n} \times G_{3p}$. Se tiene que $(AXY)Y^2 = AXY^3 = AX$, que tiene orden $3np$ ya que n y $3p$ son coprimos, y $(AX)^p =$

A^p. Como p y $3n$ son coprimos, por la identidad de Bezout, existen dos enteros a y b tales que $pa + 3nb = 1$. Entonces, $(AX)^{pa} = A^{pa} = A^{(1-3nb)} = A$. De igual forma, $(AX)^{3nb} = X^{3nb} = X^{(1-pa)} = X$.

Tomamos Y y AXY, elementos de orden 3 y $3n$ respectivamente, como generadores de $C_{3n} \times G_{3p}$. Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [3,3n], \{(-)\})$ y $\theta: \Lambda \to C_{3n} \times G_{3p}$ definida por:

$$\begin{aligned}\theta(x_1) &= Y,\\ \theta(x_2) &= AXY,\\ \theta(e_1) &= (Y\,AXY)^{-1},\\ \theta(c_{1,0}) &= 1.\end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_{3n} \times G_{3p}$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}$. De manera que obtenemos

$$\rho(C_{3n} \times G_{3p}) = 1 + o(C_{3n} \times G_{3p})\,|\Lambda|^* = 1 + 3n \cdot 3p\,\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}\right)$$

$$= 1 + 3p\,(3n - n - 1) = 1 + 3p\,(2n - 1)$$

que es, precisamente, la fórmula que proporciona May para el género real de esta familia [16, Corolario 8].

3. $C_n \times H_{3p^2}$

Sea p primo impar tal que 3 divide a $p + 1$, consideramos el grupo H_{3p^2} con presentación:

$$A^3 = X^p = Y^p = 1, \qquad XY = YX, \qquad A^{-1}XA = Y, \qquad A^{-1}YA = X^{-1}Y^{-1}$$

De las anteriores relaciones, se tiene que $XA = AY, YA = AX^{-1}Y^{-1}$. Veamos que los elementos AX y AY tienen orden 3:

$$(AX)^3 = A(XA)(XA)X = AAYAYX = A^2(YA)YX = A^2(AX^{-1}Y^{-1})YX$$

$$= A^3X^{-1}Y^{-1}YX = A^3 = 1.$$

$$(AY)^3 = A(YA)YAY = A(AX^{-1}Y^{-1})YAY = A^2X^{-1}(AY) = A^2X^{-1}(XA) = 1.$$

Veamos ahora si los elementos AX y AY generan el grupo H_{3p^2}.

$$\begin{gathered}(AY)(AX)^2(AY)^2(AX) = (AY)(AX)(AX)(AY)(AY)(AX)\\ = (AY)A(XA)XAY(AY)(AX) = (AY)A(AY)XAY(AY)(AX)\\ = (AY)AAY(XA)Y(AY)(AX)\\ = (AY)AAY(AY)Y(AY)(AX)\\ = (AY)A^2(YA)YY(AY)(AX) = (AY)A^2(AX^{-1}Y^{-1})YY(AY)(AX)\\ = (AY)A^3X^{-1}Y^{-1}YY(AY)(AX) = (AY)X^{-1}Y(AY)(AX) = (AY)X^{-1}YXA(AX)\\ = (AY)X^{-1}XYA(AX) = (AY)YA(AX) = (XA)YA(AX) = X(AY)A(AX)\\ = XXAA(AX) = X^2A^3X = X^3.\end{gathered}$$

Dado que 3 divide a $p+1$, existe un entero k tal que $3k = p+1$. Luego,

$$\big((AY)(AX)^2(AY)^2(AX)\big)^k = (X^3)^k = X^{3k} = X^{(p+1)} = X^pX = X.$$

Entonces,

$$(AX)\left[\big((AY)(AX)^2(AY)^2(AX)\big)^k\right]^{(p-1)} = AXX^{(p-1)} = AX^p = A$$

y

$$\left[(AX)\left[\big((AY)(AX)^2(AY)^2(AX)\big)^k\right]^{(p-1)}\right]^2 (AY) = A^2AY = A^3Y = Y$$

Por tanto, los elementos AX y AY, ambos de orden 3, generan el grupo H_{3p^2}.

Sea C_n el grupo cíclico de orden n, con n primo con $3p$, consideramos el producto directo $C_n \times H_{3p^2}$.

Sea B el generador de C_n. Veamos que los elementos AY y BAX generan el producto directo $C_n \times H_{3p^2}$. Tomamos BAX, como B tiene orden n y AX tiene orden 3, primos entre sí, por la identidad de Bezout, existen dos enteros a y b tales que $na + 3b = 1$. Entonces $(BAX)^{3b} = B^{3b}(AX)^{3b} = B^{(1-na)}(AX)^{3b} = B$. Hemos generado el elemento B, luego podemos generar AX con B y BAX. AX y AY generan H_{3p^2}, B genera C_n, y ya tenemos generado el producto.

Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0, +, [3, 3n], \{(-)\})$ y $\theta \colon \Lambda \to C_n \times H_{3p^2}$ definida por:

$$\begin{aligned}
\theta(x_1) &= AY,\\
\theta(x_2) &= BAX,\\
\theta(e_1) &= (AYBAX)^{-1},\\
\theta(c_{1,0}) &= 1.
\end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en $C_n \times H_{3p^2}$, $\Gamma = \ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^* = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}$. De manera que obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho\big(C_n \times H_{3p^2}\big) &= 1 + o\big(C_n \times H_{3p^2}\big)\,|\Lambda|^* = 1 + 3n \cdot p^2\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}\right)\\
&= 1 + p^2\,(3n - n - 1) = 1 + p^2\,(2n - 1)
\end{aligned}$$

que es, precisamente, la fórmula que proporciona May para el género real de esta familia [16, Corolario 9].

Aplicando los resultados anteriores, se tiene:

Teorema 12 [16, Teorema 8] Sea p un primo impar. Si el entero positivo n es primo con $3p$, entonces existe al menos un grupo con género real $1 + p^2(2n-1)$.

Corolario 1 [16, Corolario 10] Si p es un primo impar, entonces existe al menos un grupo con género real $1+p^2$.

3.2.4. Relación de congruencias

A continuación se muestran algunas de las congruencias obtenidas a partir de los resultados de las secciones 3.2.1. y 3.2.2. Utilizando estas congruencias, junto con el resto de fórmulas vistas, se han obtenido los valores de ρ hasta 10000 que se ha demostrado que forman parte del espectro del género real.

Sección 3.2.1. [Proposición 3]

- $\rho = 6k+4\ (m=3)$
- $\rho = 20k + 8\ (m=5)$
- $\rho = 42k+36\ (m=7)$

$\vdots$

- $\rho = 10100k + 10000\ (m = 101)$

Sección 3.2.2.

1. $C_p \times_\phi C_n$

Con $p=3$, tenemos $\rho\left(C_3 \times_\phi C_n\right) = 2(n-1)$, para n primo con 3 y múltiplo de 4. Para que n sea primo con 3, tiene que ser de la forma $n = 3t + 1$ ó $n = 3t+2$.

Si $n = 3t+1$ es múltiplo de 4, entonces $3t$ es múltiplo de 4 más 3, luego t es múltiplo de 4 más 1 y, por tanto, $t = 4k+1$ y $n = 3(4k+1)+1 = 12k+4$. De donde, $\rho\left(C_3 \times_\phi C_n\right) = 2(n-1) = 2(12k+3) = 24k+6$.

Si $n = 3t+2$ es múltiplo de 4, entonces $3t$ es múltiplo de 4 más 2, luego t es múltiplo de 4 más 2 y, por tanto, $t = 4k+2$ y $n = 3(4k+2)+2 = 12k+8$. De donde $\rho\left(C_3 \times_\phi C_n\right) = 2(n-1) = 2(12k+7) = 24k+14$.

- $\rho = 24k+6$
- $\rho = 24k+14$

Con $p=5$, tenemos $\rho\left(C_5 \times_\phi C_n\right) = 4(n-1)$, para n primo con 5 y múltiplo de 8. Para que n sea primo con 5, tiene que ser de la forma $n = 5t + r$ con $r \in \{1,2,3,4\}$.

Si $n = 5t+1$ es múltiplo de 8, entonces $5t$ es múltiplo de 8 más 7, luego t es múltiplo de 8 más 3 y, por tanto, $t = 8k+3$ y $n = 5(8k+3)+1 = 40k+16$. De donde, $\rho\left(C_5 \times_\phi C_n\right) = 4(n-1) = 4(40k+15) = 160k+60$.

Si $n = 5t + 2$ es múltiplo de 8, entonces $5t$ es múltiplo de 8 más 6, luego t es múltiplo de 8 más 6 y, por tanto, $t = 8k + 6$ y $n = 5(8k + 6) + 2 = 40k + 32$. De donde $\rho(C_5 \times_\phi C_n) = 4(n - 1) = 4(40k + 31) = 160k + 124$.

Si $n = 5t + 3$ es múltiplo de 8, entonces $5t$ es múltiplo de 8 más 5, luego t es múltiplo de 8 más 1 y, por tanto, $t = 8k + 1$ y $n = 5(8k + 1) + 3 = 40k + 8$. De donde $\rho(C_5 \times_\phi C_n) = 4(n - 1) = 4(40k + 7) = 160k + 28$.

Si $n = 5t + 4$ es múltiplo de 8, entonces $5t$ es múltiplo de 8 más 4, luego t es múltiplo de 8 más 4 y, por tanto, $t = 8k + 4$ y $n = 5(8k + 4) + 4 = 40k + 24$. De donde $\rho(C_5 \times_\phi C_n) = 4(n - 1) = 4(40k + 23) = 160k + 92$.

- $\rho = 160k + 28$
- $\rho = 160k + 60$
- $\rho = 160k + 92$
- $\rho = 160k + 124$

Para cubrir todos los valores pares de ρ hasta 10000 se han hecho estos mismos cálculos con todos los primos hasta $p = 79$.

2. $C_p \times_\theta C_n$
Con $p = 7$, tenemos $\rho(C_7 \times_\theta C_n) = 6(n - 1)$, para n primo con 7 y múltiplo de 9. Haciendo cálculos similares a los anteriores, se obtienen las siguientes congruencias:

$$\rho = 378k + r, \text{ con } r = 48, 102, 156, 210, 264, 318.$$

Con $p = 13$, tenemos $\rho(C_{13} \times_\theta C_n) = 13(n - 1)$, para n primo con 13 y múltiplo de 27. Haciendo cálculos similares a los anteriores, se obtienen las siguientes congruencias:

$$\rho = 4212k + r, \text{ con } r = 312, 636, 960, 1284, 1608, 1932, 2256, 2580, 2904, 3228, 3552, 3876.$$

Para cubrir todos los valores pares de ρ hasta 10000 se han obtenido las congruencias correspondientes a todos los primos p tales que 3 divide a $p - 1$ hasta $p = 79$. Lo mismo se ha hecho con cada uno de los demás grupos de las secciones 3.2.2. y 3.2.3.

4. EL ESPECTRO DEL GÉNERO REAL

En este capítulo se determinan los valores obtenidos con las sucesiones vistas en el capítulo anterior, es decir, aquellos valores de ρ que se sabe que son género real de algún grupo y que, por tanto, pertenecen al espectro del género real. Se estudian los valores que no han aparecido con estas sucesiones y que quedan por determinar si son género real de algún grupo. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los obtenidos por May en su artículo *Groups of even real genus* [16].

Sea T el conjunto de enteros $\rho \geq 1$ para los cuales existe un grupo con género real ρ, con la restricción de que para ρ par, ρ ha sido obtenido con una de las fórmulas vistas en la sección 3.2. del capítulo anterior. Se define *h(n)* como el número de enteros del conjunto T menores o iguales que n. A continuación se muestra la tabla con la que May concluye el artículo de los grupos con género real par [16].

Tabla 1: Enteros cubiertos

n	$h(n)$	$n - h(n)$	$mult. de\ 12$	$p + 1$
10^2	95	5	4	4
10^3	967	33	31	27
10^4	9.669	331	267	195
10^5	96.795	3.205	2.429	1.541
10^6	968.673	31.327	22.933	12.655

En la segunda columna de esta tabla, May indica el número de enteros $\rho \geq 1$ que se sabe que pertenecen al espectro del género real hasta cierto entero n, indicado en la primera columna, a esta cantidad la denota por *h(n)*. En la tercera columna indica el número de valores que quedan por decidir si son género real de algún grupo hasta n, en la cuarta cuántos de ellos son múltiplos de 12 y en la quinta cuántos son de la forma $p + 1$, con p primo. En particular, hasta n = 10.000 obtiene un total de 9.669 números que son género real de algún grupo, de los cuales 5.000 son impares y los 4.669 restantes los ha obtenido a partir de las sucesiones aritméticas vistas en la sección 3.2. del capítulo anterior. Quedan por decidir si son género real de algún grupo 331 números, de los cuales 267 son múltiplos de 12 y 195 son de la forma $p + 1$, con p primo.

Uno de los objetivos de este trabajo era determinar los valores de ρ que se obtienen con las sucesiones aritméticas vistas en el capítulo anterior hasta $n = 10.000$ y estudiar aquellos que no aparecen. Los valores no obtenidos son los siguientes:

2, 12, 24, 72, 84, 108, 132, 168, 192, 228, 240, 360, 384, 392, 408, 420, 432, 492, 504, 552, 600, 648, 660, 684, 720, 744, 780, 840, 852, 864, 888, 972, 984, 1004, 1032, 1068, 1082, 1092, 1104, 1122, 1152, 1164, 1188, 1224, 1260, 1320, 1368, 1412, 1428, 1488, 1508, 1512, 1572, 1584, 1620, 1644, 1680, 1740, 1752, 1812, 1824, 1848, 1872, 1904, 1920, 2004, 2028, 2040, 2064, 2088, 2112, 2124, 2148, 2184, 2228, 2232, 2244, 2340, 2352, 2420, 2448, 2466, 2564, 2568, 2592, 2604, 2664, 2688, 2700, 2712, 2772, 2784, 2820, 2828, 2832, 2840, 2928, 2988, 3000, 3012, 3024, 3044, 3048, 3084, 3120, 3152, 3168, 3192, 3204, 3224, 3300, 3348, 3372, 3378, 3408, 3432, 3468, 3488, 3492, 3528, 3540, 3624, 3660, 3672, 3768, 3842, 3852, 3860, 3864, 3884, 3912, 3924, 3948, 3972, 3980, 4008, 4104, 4128, 4140, 4184, 4268, 4272, 4308, 4392, 4440, 4464, 4472, 4548, 4560, 4626, 4644, 4680, 4704, 4728, 4752, 4812, 4872, 4884, 4914, 4920, 4932, 4944, 4968, 5004, 5028, 5040, 5088, 5100, 5220, 5268, 5288, 5304, 5352, 5360, 5388, 5400, 5472, 5484, 5508, 5520, 5568, 5592, 5640, 5652, 5682, 5688, 5700, 5712, 5784, 5808, 5844, 5868, 5900, 5904, 5912, 5928, 5960, 6024, 6048, 6060, 6104, 6180, 6264, 6266, 6288, 6348, 6360, 6372, 6432, 6552, 6564, 6594, 6600, 6660, 6720, 6740, 6804, 6828, 6864, 6888, 6912, 6930, 6948, 6984, 7020, 7044, 7080, 7104, 7128, 7170, 7184, 7188, 7212, 7224, 7248, 7308, 7332, 7340, 7368, 7464, 7488, 7524, 7532, 7560, 7572, 7584, 7692, 7704, 7728, 7812, 7850, 7884, 7908, 7920, 7940, 7968, 7980, 8004, 8064, 8084, 8112, 8120, 8132, 8172, 8178, 8208, 8232, 8280, 8292, 8304, 8388, 8400, 8424, 8448, 8484, 8504, 8544, 8552, 8592, 8640, 8664, 8748, 8760, 8768, 8784, 8792, 8808, 8810, 8832, 8844, 8868, 8882, 8928, 8952, 8964, 8994, 9000, 9048, 9072, 9132, 9168, 9186, 9240, 9252, 9312, 9324, 9330, 9380, 9420, 9426, 9428, 9432, 9480, 9492, 9524, 9540, 9572, 9618, 9624, 9648, 9672, 9720, 9732, 9744, 9792, 9804, 9840, 9888, 9912, 9924 y 9960.

De ellos, son múltiplo de 12 los siguientes:

12, 24, 72, 84, 108, 132, 168, 192, 228, 240, 360, 384, 408, 420, 432, 492, 504, 552, 600, 648, 660, 684, 720, 744, 780, 840, 852, 864, 888, 972, 984, 1032, 1068, 1092, 1104, 1152, 1164, 1188, 1224, 1260, 1320, 1368, 1428, 1488, 1512, 1572, 1584, 1620, 1644, 1680, 1740, 1752, 1812, 1824, 1848, 1872, 1920, 2004, 2028, 2040, 2064, 2088, 2112, 2124, 2148, 2184, 2232, 2244, 2340, 2352, 2448, 2568, 2592, 2604, 2664, 2688, 2700, 2712, 2772, 2784, 2820, 2832, 2928, 2988, 3000, 3012, 3024, 3048, 3084, 3120, 3168, 3192, 3204, 3300, 3348, 3372, 3408, 3432, 3468, 3492, 3528, 3540, 3624, 3660, 3672, 3768, 3852, 3864, 3912, 3924, 3948, 3972, 4008, 4104, 4128, 4140, 4272, 4308, 4392, 4440, 4464, 4548, 4560, 4644, 4680, 4704, 4728, 4752, 4812, 4872, 4884, 4920, 4932, 4944, 4968, 5004, 5028, 5040, 5088, 5100, 5220, 5268, 5304, 5352, 5388, 5400, 5472, 5484, 5508, 5520, 5568, 5592, 5640, 5652, 5688, 5700, 5712, 5784, 5808, 5844, 5868, 5904, 5928, 6024, 6048, 6060, 6180, 6264, 6288, 6348, 6360, 6372, 6432, 6552, 6564, 6600, 6660, 6720, 6804, 6828, 6864, 6888, 6912, 6948, 6984, 7020, 7044, 7080, 7104, 7128, 7188, 7212, 7224, 7248, 7308, 7332, 7368, 7464, 7488, 7524, 7560, 7572, 7584, 7692, 7704, 7728, 7812, 7884, 7908, 7920, 7968, 7980, 8004, 8064, 8112, 8172, 8208, 8232, 8280, 8292, 8304, 8388, 8400, 8424, 8448, 8484, 8544, 8592, 8640, 8664, 8748, 8760, 8784, 8808, 8832, 8844, 8868, 8928, 8952, 8964, 9000, 9048, 9072, 9132, 9168, 9240, 9252, 9312, 9324, 9420, 9432, 9480, 9492, 9540, 9624, 9648, 9672, 9720, 9732, 9744, 9792, 9804, 9840, 9888, 9912, 9924 y 9960.

Y de la forma $p+1$, con p primo:

12, 24, 72, 84, 108, 132, 168, 192, 228, 240, 360, 384, 420, 432, 492, 504, 600, 648, 660, 684, 720, 744, 840, 864, 888, 972, 984, 1032, 1092, 1104, 1152, 1164, 1188, 1224, 1260, 1320, 1368, 1428, 1488, 1512, 1572, 1584, 1620, 1812, 1824, 1848, 1872, 2004, 2028, 2040, 2064, 2088, 2112, 2244, 2340, 2352, 2448, 2592, 2664, 2688, 2700, 2712, 2820, 2928, 3000, 3012, 3024, 3084, 3120, 3168, 3192, 3204, 3300, 3348, 3372, 3408, 3468, 3492, 3528, 3540, 3624, 3660, 3672, 3768, 3852, 3864, 3912, 3924, 3948, 4008, 4128, 4140, 4272, 4392, 4464, 4548, 4644, 4680, 4704, 4752, 4872, 4920, 4932, 4944, 4968, 5004, 5040, 5088, 5100, 5304, 5352, 5388, 5400, 5472, 5484, 5508, 5520, 5592, 5640, 5652, 5712, 5784, 5808, 5844, 5868, 5904, 5928, 6048, 6264, 6288, 6360, 6552, 6564, 6600, 6660, 6720, 6804, 6828, 6864, 6912, 6948, 6984, 7020, 7044, 7080, 7104, 7128, 7188, 7212, 7248, 7308, 7332, 7488, 7524, 7560, 7584, 7692, 7704, 7728, 7884, 7908, 7920, 8112, 8172, 8232, 8292, 8388, 8424, 8448, 8544, 8664, 8748, 8784, 8808, 8832, 8868, 8952, 8964, 9000, 9240, 9312, 9324, 9420, 9432, 9480, 9492, 9540, 9624, 9720, 9744, 9792, 9804, 9840, 9888 y 9924.

Efectivamente, hay un total de 331 valores que no aparecen en las sucesiones aritméticas hasta $n = 10.000$, de los cuales 267 son múltiplos de 12, y 195 son de la forma $p+1$, con p primo, las mismas cantidades que obtiene May en [16].

Los 331 valores no obtenidos se pueden desglosar directamente según su resto módulo 12. Hay 64 valores que no son múltiplos de 12, los cuales tienen resto 2, 6 u 8, dado que en la sección 3.2.1. se descartan los de resto 4 y 10 en la congruencia $\rho = 6k + 4$. En la tabla 2 se muestran los valores de ρ que no son múltiplos de 12 junto con su resto módulo 12.

Existe un parámetro análogo al género real llamado género imaginario, $\tilde{\sigma}(G)$, para superficies no orientables sin borde. En [3] se comparan ambos parámetros y se observa que para muchos grupos se tiene $\tilde{\sigma}(G) = \rho(G) + 1$. Casi todos los números hasta 10000 son $\tilde{\sigma}(G)$ para algún grupo. Por desgracia, si $\rho = 12t$, $\rho = 12t + 6$ ó $\rho = 12t + 8$, el grupo que conocemos con $\tilde{\sigma}(G) = \rho + 1$ no satisface la relación $\tilde{\sigma}(G) = \rho(G) + 1$, véanse [2] y [3]. En cambio, si $\rho = 12t + 2$ la situación es distinta. Tenemos los siguientes valores de ρ con resto 2 módulo 12: 2, 1082, 3842, 6266, 7850, 8810 y 8882. Sabemos que 2 no es género real de ningún grupo. Para ρ =1082, 3842, 7850, 8810, 8882 no se sabe si $\rho + 1$ es $\tilde{\sigma}(G)$ para algún grupo. Sin embargo, para $\rho = 6266$ sí. Existe un grupo G tal que $\tilde{\sigma}(G) = 6267$. Vamos a ver que este grupo cumple $\rho(G) = 6266$. Es más, todos los ρ de la forma $\rho = 60k + 26$ los obtenemos con la familia de grupos $G_k = C_5 \times_\phi C_{8+16k}$ que May no incluyó.

Tabla 2: Resto de ρ módulo 12

ρ	resto	ρ	resto
2	2	5912	8
392	8	5960	8
1004	8	6104	8
1082	2	6266	2
1122	6	6594	6
1412	8	6740	8
1508	8	6930	6
1904	8	7170	6
2228	8	7184	8
2420	8	7340	8
2466	6	7532	8
2564	8	7850	2
2828	8	7940	8
2840	8	8084	8
3044	8	8120	8
3152	8	8132	8
3224	8	8178	6
3378	6	8504	8
3488	8	8552	8
3842	2	8768	8
3860	8	8792	8
3884	8	8810	2
3980	8	8882	2
4184	8	8994	6
4268	8	9186	6
4472	8	9330	6
4626	6	9380	8
4914	6	9426	6
5288	8	9428	8
5360	8	9524	8
5682	6	9572	8
5900	8	9618	6

Sea B el generador del grupo cíclico C_5 y A el generador del grupo cíclico C_{8+16k}, consideramos el producto semidirecto $G_k = C_5 \times_\phi C_{8+16k}$ con presentación:

$$B^5 = A^{8+16k} = 1, BA = AB^2.$$

Veamos que el elemento BA^{2+4k} tiene orden 4.

$$\left(BA^{2+4k}\right)^2 = \left(BA^{2+4k}\right)\left(BA^{2+4k}\right) = A^{2+4k}B^{2^{(2+4k)}}BA^{2+4k} = A^{2+4k}B^{4\cdot 16^k}BA^{2+4k}$$

Dado que $4\cdot 16^k\ (mod\ 5) = 4\cdot 1^k\ (mod\ 5) = -1\ (mod\ 5)$, se sigue que

$$A^{2+4k}B^{4\cdot 16^k}BA^{2+4k} = A^{2+4k}B^{-1}BA^{2+4k} = A^{4+8k} \text{ de orden 2.}$$

Luego, el elemento BA^{2+4k} tiene orden 4.

Tomamos como generadores del grupo G_k los elementos BA^{2+4k} y A, de orden 4 y $8+16k$ respectivamente. Sea Λ un grupo NEC con signatura $(0,+,[4,8+16k],\{(-)\})$ y $\theta:\Lambda\to G_k$ definida por:

$$\begin{aligned}\theta(x_1)&=BA^{2+4k},\\ \theta(x_2)&=A,\\ \theta(e_1)&=A^{5+12k}B^{-1},\\ \theta(c_{1,0})&=1.\end{aligned}$$

Entonces θ es un epimorfismo de Λ en G_k, $\Gamma=\ker(\theta)$ es un grupo NEC de superficie y el área reducida de Λ es $|\Lambda|^*=\frac{5+12k}{8+16k}$. De manera que obtenemos

$$\rho(G_k)=1+o(G_k)|\Lambda|^*=1+(40+80k)\left(\frac{5+12k}{8+16k}\right)=60k+26.$$

Hemos visto, por tanto, que hay un valor de ρ hasta 10000 que sí pertenece al espectro del género real que May no contempla en su artículo, $\rho=6266$. En este trabajo se ha estudiado el espectro del género real hasta $n=10^4$, es posible que con la familia G_k se cubra algún valor más hasta $n=10^6$ que May no haya contemplado. Además, observamos que no todos los valores de ρ que no aparecen son múltiplos de 12 ni de la forma $p+1$ con p primo, de hecho en la Tabla 1 se ve que cuanto mayor es n, la proporción de múltiplos de 12 y de $\rho=p+1$ con p primo se reduce.

Una línea de estudio futura podría ser ver qué ocurre con los otros cinco valores con resto 2 módulo 12: 1082, 3842, 7850, 8810 y 8882, dado que para estos valores de ρ no se sabe si ρ es género real de algún grupo, ni si $\rho+1$ es género imaginario de algún grupo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. N.L. ALLING, N. Greenleaf. Foundations of the theory of Klein surfaces. Lect. Not. in Math. 219, Springer- Verlag, 1971.
2. A. BACELO, J. J. ETAYO, E. MARTÍNEZ. Filling gaps of the symmetric crosscap spectrum. Moscow Math. J. 17 (2017), 357-369.
3. A. BACELO, J.J. ETAYO, E. MARTÍNEZ. Comparing the real genus and the symmetric crosscap number of a group. Preprint 2024.
4. A.F. BEARDON. The Geometry of Discrete Groups. G. T. M. 91, Springer-Verlag, 1983.

5. E. BUJALANCE, J.J. ETAYO, J.M. GAMBOA, G. GROMADZKI. Automorphism groups of compact bordered Klein surfaces. A combinatorial approach. Lect. Not. in Math. 1439, Springer-Verlag, 1990.
6. E. BUJALANCE, E. MARTÍNEZ. A remark on NEC groups of surfaces with boundary. Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 263-266.
7. J.J. ETAYO, E. MARTÍNEZ. El género real de los grupos $C_{2m} \times D_n$. Contribuciones Matemáticas. Libro Homenaje al Profesor Enrique Outerelo, Universidad Complutense, 2004, pp. 171–182.
8. J.J. ETAYO, E. MARTÍNEZ. The real genus of cyclic by dihedral and dihedral by dihedral groups. J. of Algebra. 296 (2006), 145-156.
9. G. GROMADZKI, B. MOCKIEWICZ. The groups of real genus 6, 7 and 8. Houston J. Math. 28 (2002), 691–699.
10. A.M. MACBEATH. The classification of non-Euclidean Crystallographic groups. Canad. J. Math. 19 (1967), 1192-1205.
11. C.L. MAY. Cyclic automorphism groups of compact bordered Klein surfaces. Houston J. Math. 3 (1977) 395-405.
12. C.L. MAY. Large automorphism groups of compact Klein surfaces with boundary. Glasgow Math. J. 18 (1977), 1-10.
13. C.L. MAY. Finite groups acting on bordered surfaces and the real genus of a group. Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 707-724.
14. C.L. MAY. Groups of small real genus. Houston J. Math. 20 (1994), 393–408.
15. C.L. MAY. The real genus of 2-groups. J. of Algebra. 6 (2007), 103-118.
16. C.L. MAY. Groups of even real genus. J. of Algebra. 6 (2007), 973-989.
17. D. MCCULLOUGH. Minimal genus of Abelian actions on Klein surfaces with boundary. Math. Z. 205 (1990), 421-436.
18. R. PRESTON. Projective Structures and fundamental domains on compact Klein surfaces. Thesis Univ. of Texas, (1975).
19. D. SINGERMAN. Automorphisms of compact non-orientable Riemann surfaces. Glasgow Math. J. 12 (1971) 50-59.
20. D. SINGERMAN. On the structure of Non-Euclidean Crystallographic Groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. 76 (1974), 233-240.
21. H.C. WILKIE. On non-Euclidean Crystallographic groups. Math. Z. 91 (1966), 87-102.
22. H. ZIESCHANG, E. VOGT, H.D. COLDEWEY. Surfaces and planar discontinuous groups. Lect. Not. in Math. 835, Springer-Verlag, 1980.